

UNA EXPERIENCIA PRÁCTICA DE PROGRAMACIÓN MATEMÁTICA CON LINGO

P. Dorta González, D.R. Santos Peñate, R. Suárez Vega

Departamento de Métodos Cuantitativos

Universidad de Las Palmas de G.C.

Resumen:

El software matemático se ha venido empleando desde hace varios años como un asistente más en la docencia de ciertas titulaciones con buenos resultados. Las ventajas de su utilización son muchas. En este trabajo se muestra una práctica de optimización matemática con ayuda de LINGO. Se proponen dos problemas, uno lineal y otro no lineal, relacionados con el problema clásico de transporte en Economía Industrial.

Palabras clave: optimización matemática, problema de transporte, LINGO.

1 INTRODUCCIÓN

En este trabajo se muestra una práctica de laboratorio correspondiente a contenidos de programación matemática. Se desarrollan dos ejemplos, uno lineal y otro no lineal, basados en el problema clásico de transporte. Tanto la solución de los mismos como el análisis de sensibilidad se realiza con LINGO.

LINGO es una herramienta matemática que resuelve una amplia gama de problemas de optimización, lineales, no lineales y enteros, utilizando un lenguaje sencillo, lo que lo convierte en un asistente ideal en la docencia. Junto con LINDO forma parte del paquete SOLVER SUITE (manual de usuario, 1996). Para la resolución de los problemas lineales se utiliza LINDO. Sin embargo, a diferencia de éste último, LINGO incorpora un lenguaje de programación que permite escribir de manera cómoda el modelo. Debe tenerse en cuenta que LINGO detecta óptimos locales y que salvo para la programación lineal y convexa, no siempre resulta fácil identificar los óptimos globales.

Esta práctica está pensada para alumnos de primer curso de la Licenciatura en Economía, Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas y la Diplomatura en Ciencias Empresariales. Para una buena visión de las matemáticas en la Economía y la Empresa puede consultarse Haeussler y Paul (1997), Sydsaeter y Hammond (1996). El problema de transporte sin restricciones de capacidad es lineal y se resuelve habitualmente en la asignatura Matemáticas II (álgebra y programación lineal). El problema de transporte con restricciones de capacidad es no lineal y ha sido considerado en esta práctica para ilustrar el uso del lenguaje de programación de LINGO, el cual permite aumentar de manera sencilla las dimensiones del problema, dadas por el número variables y restricciones en el modelo.

Aunque el objetivo de este trabajo es mostrar las posibilidades del software en la docencia de la optimización matemática y no de servir de manual de introducción al manejo de LINGO, se incluyen los conocimientos elementales necesarios para empezar a trabajar con este paquete.

2 PROBLEMA DE TRANSPORTE SIN RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD

En este apartado se resuelve el siguiente ejemplo (Suárez y otros, 2001):

“Una fábrica que tiene dos plantas localizadas en las ciudades A y B, necesita suministrar un determinado producto a tres almacenes situados en las ciudades C, D y E. Las plantas A y B pueden suministrar semanalmente 80 y 90 unidades del producto, respectivamente. Los almacenes necesitan semanalmente 40, 50 y 80 unidades del producto para satisfacer su demanda. Los costes de transporte por unidad de producto se recogen en la tabla siguiente:

<i>Ciudad</i>	<i>C</i>	<i>D</i>	<i>E</i>
A	5	3	4
B	6	7	2

El problema consiste en determinar cuántas unidades del producto se deberán transportar desde cada planta a cada almacén, de forma que se minimice el coste total de transporte.”

Como puede observarse, se trata de un problema lineal. Para una buena introducción en la programación lineal puede consultarse Chiang, 1987.

2.1 FORMULACION DEL PROBLEMA

Denotando por x_{AC} , x_{AD} , x_{AE} las unidades enviadas de la planta A hacia los almacenes C, D y E, respectivamente, y por x_{BC} , x_{BD} , x_{BE} las unidades enviadas de la planta B hacia los almacenes C, D y E, respectivamente, la formulación del problema de programación lineal asociado es la siguiente:

$$\text{Min } 5x_{AC} + 3x_{AD} + 4x_{AE} + 6x_{BC} + 7x_{BD} + 2x_{BE}$$

s.a.

$$x_{AC} + x_{AD} + x_{AE} \leq 80$$

$$x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} \leq 90$$

$$x_{AC} + x_{BC} \geq 40$$

$$x_{AD} + x_{BD} \geq 50$$

$$x_{AE} + x_{BE} \geq 80$$

$$x_{AC}, x_{AD}, x_{AE}, x_{BC}, x_{BD}, x_{BE} \geq 0$$

Las dos primeras restricciones imponen que la cantidad suministrada en las plantas A y B no supere su disponibilidad semanal, mientras que las tres siguientes imponen que se cubra el requerimiento mínimo en los almacenes C, D y E. Obsérvese que aunque las restricciones son de desigualdad, en la solución óptima las holguras asociadas a los

almacenes serán nulas debido a que se está minimizando el coste de transporte y, por tanto, no se transportarán más unidades que las demandadas. Además, como la producción total de las plantas coincide con la demanda total de los almacenes, tanto las restricciones asociadas a las plantas como a los almacenes pueden ser escritas con igualdad.

Si el producto fuese indivisible, las restricciones de no negatividad deberían ser reemplazadas por otras en las que se garantice que las variables sean enteras no negativas. De cualquier forma, en este caso particular la solución que se obtiene es entera.

2.2 MODELO EN LINGO

La escritura del modelo se basa en las siguientes reglas:

- La función objetivo va precedida de “max=” o “min=” y finaliza en “;” al igual que cada una de las restricciones.
- Las desigualdades pueden escribirse de forma estricta, aunque LINGO las interpreta siempre como $\leq$ o $\geq$, según el caso.
- No es necesario introducir las restricciones de no negatividad, si las hubiera, ya que LINGO las considera por defecto.
- Es necesario indicar el producto con “*”.

Teniendo en cuenta estas reglas, el modelo puede escribirse como sigue:

```
MIN=5*XAC+3*XAD+4*XAE+6*XBC+7*XBD+2*XBE;
XAC+XAD+XAE<80;
XBC+XBD+XBE<90;
XAC+XBC>40;
XAD+XBD>50;
XAE+XBE>80;
```

2.3 RESOLUCION

La ventana de salida que proporciona LINGO es la siguiente:

Objective value: 520.0000

Variable	Value	Reduced Cost
XAC	30.00000	0.0000000E+00
XAD	50.00000	0.0000000E+00
XAE	0.0000000E+00	3.000000
XBC	10.00000	0.0000000E+00
XBD	0.0000000E+00	3.000000

	XBE	80.00000	0.0000000E+00
Row	Slack or Surplus	Dual Price	
1	520.0000	1.000000	
2	0.0000000E+00	1.000000	
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00	
4	0.0000000E+00	-6.000000	
5	0.0000000E+00	-4.000000	
6	0.0000000E+00	-2.000000	

Como puede observarse, para minimizar los costes de transporte han de enviarse 30 unidades de la planta A al almacén C y el resto, es decir 50, al almacén D. En la planta B se ha de asignar 10 unidades al almacén C y el resto (80) al E. El coste de transporte mínimo es 520. Obsérvese que la solución no es única dado que la holgura y el precio sombra de la producción de la planta B son simultáneamente cero.

Como puede observarse, todas las holguras son nulas. La interpretación de los precios sombra (solución dual) es la siguiente. Una unidad adicional fabricada en la planta A reduce el coste total de transporte en una unidad; sin embargo, una unidad adicional en la planta B no reduce el coste total de transporte. Por tanto, si la firma se planteara incrementar la producción, este incremento debería producirse en la planta A. Finalmente, el incremento de una unidad en la demanda de cada almacén provoca un aumento en el coste total de transporte de 6, 4 y 2 unidades, respectivamente. De esta forma, en el caso de un aumento en la demanda, a la firma le interesaría que dicho incremento se produzca en el almacén E.

2.4 ANALISIS DE SENSIBILIDAD

El comando *Range* del menú *Lingo* muestra la siguiente tabla:

Ranges in which the basis is unchanged:

Variable	Objective Coefficient Ranges		
	Current Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
XAC	5.000000	1.000000	3.000000
XAD	3.000000	3.000000	4.000000
XAE	4.000000	INFINITY	3.000000
XBC	6.000000	3.000000	1.000000
XBD	7.000000	INFINITY	3.000000
XBE	2.000000	3.000000	2.000000

Row	Righthand Side Ranges		
	Current RHS	Allowable Increase	Allowable Decrease
2	80.00000	10.00000	0.0
3	90.00000	INFINITY	0.0

	4	40.00000	0.0	10.00000
	5	50.00000	0.0	10.00000
6		80.00000	0.0	80.00000

Esta tabla indica en primer lugar el rango de variación permitido de cada coeficiente en la función objetivo para que, permaneciendo inalterados el resto de ellos, la solución del problema primal no cambie. En segundo lugar, muestra el rango de variación permitido en el término independiente de cada restricción para que, permaneciendo inalterados el resto, la solución siga siendo la misma. A modo de ejemplo, el coste unitario de transporte entre las ciudades A y C puede variar en el intervalo [2,6] sin que la solución del problema cambie. De forma similar, la producción en la planta A puede variar en el intervalo [80,90] y los precios sombra seguirían siendo los mismos.

3 PROBLEMA DE TRANSPORTE CON RESTRICCIÓN DE CAPACIDAD

En algunos problemas sobre redes, los costes unitarios varían con la cantidad transportada a través de cada ruta. Cualquiera que circule por una gran ciudad durante la hora punta puede experimentar este hecho. Cuando el número de vehículos en la vía aumenta, el tiempo también aumenta. En aquellos casos en los que el coste de transporte depende del tiempo, éste aumenta con la densidad del tráfico. Generalmente, el coste no se incrementa de forma lineal. De hecho, para un mismo incremento en el flujo, si el tráfico es reducido el incremento en el tiempo es apenas perceptible, pero sin embargo, a medida que nos aproximamos a la capacidad de la vía el incremento en el tiempo se hace considerable.

Supongamos que el tiempo (o coste) requerido para recorrer un par origen-destino (arista) de la red obedece a la siguiente función:

$$t_a(x) = r_a \cdot \frac{x}{\left(1 - \frac{x}{c_a}\right)}$$

donde:

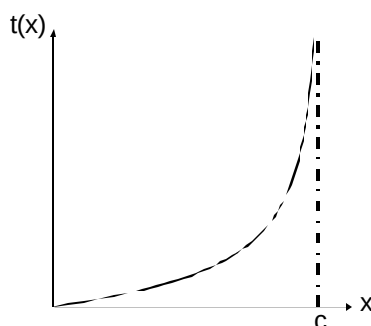
t_a = tiempo (o coste) total empleado en la arista a,

x = cantidad total transportada (flujo) a lo largo de la arista a,

c_a = capacidad de la arista a, es decir, la cantidad máxima que puede circular por esa vía,

r_a = tiempo (o coste) requerido para transportar una unidad a lo largo de la arista a , si no existe congestión a lo largo de esta arista.

El coeficiente r_a depende de características como el tipo de vía y la longitud. Como puede observarse, si la capacidad es infinita (problema sin restricciones de capacidad) $t_a(x) = r_a \cdot x$. Por otro lado, cuando la cantidad transportada se aproxima a la capacidad de la vía, el coste de transporte tiende a infinito. Además, cuando la cantidad transportada es nula el coste de transporte es cero. La función coste de transporte puede representarse con Derive (herramienta conocida por nuestros alumnos) y su gráfica es:



3.1 ENUNCIADO DEL PROBLEMA

Un ejemplo particular es el siguiente:

“Una fábrica que tiene dos plantas localizadas en las ciudades A y B, necesita suministrar un determinado producto a tres almacenes situados en las ciudades C, D y E. Las plantas A y B pueden suministrar semanalmente 80 y 90 unidades del producto, respectivamente. Los almacenes necesitan semanalmente 40, 50 y 80 unidades del producto para satisfacer su demanda. Las capacidades de las vías de comunicación entre dichas ciudades y los tiempos unitarios asociados a cada una de ellas se muestran en la tabla siguiente:

Ciudad	C		D		E	
	c	r	c	r	c	r
A	50	17	100	14	100	11
B	50	16	80	15	80	10

Teniendo en cuenta que

$$t(x) = r \cdot \frac{x}{\left(1 - \frac{x}{c}\right)},$$

decidir cuántas unidades del producto se deberán transportar desde cada planta a cada almacén, de forma que se minimice el tiempo total de transporte”

2.2 FORMULACION DEL PROBLEMA

La formulación del problema es la siguiente:

$$\begin{aligned}
 \text{Min} \quad & \frac{17 \cdot x_{AC}}{\left(1 - \frac{x_{AC}}{50}\right)} + \frac{14 \cdot x_{AD}}{\left(1 - \frac{x_{AD}}{100}\right)} + \frac{11 \cdot x_{AE}}{\left(1 - \frac{x_{AE}}{100}\right)} + \frac{16 \cdot x_{BC}}{\left(1 - \frac{x_{BC}}{50}\right)} + \frac{15 \cdot x_{BD}}{\left(1 - \frac{x_{BD}}{80}\right)} + \frac{10 \cdot x_{BE}}{\left(1 - \frac{x_{BE}}{80}\right)} \\
 \text{s.a.} \quad & \\
 & x_{AC} + x_{AD} + x_{AE} \leq 80 \\
 & x_{BC} + x_{BD} + x_{BE} \leq 90 \\
 & x_{AC} + x_{BC} \geq 40 \\
 & x_{AD} + x_{BD} \geq 50 \\
 & x_{AE} + x_{BE} \geq 80 \\
 & x_{AC}, x_{AD}, x_{AE}, x_{BC}, x_{BD}, x_{BE} \geq 0
 \end{aligned}$$

En realidad, lo único que ha variado respecto al problema sin restricciones de capacidad es la función objetivo. El nuevo objetivo es no lineal, así que el problema resultante es también no lineal. Dado que la función $t(x)$ es estrictamente convexa, se tiene que la función objetivo es también estrictamente convexa, por lo que existe un único óptimo global. Además, no existen óptimos locales no globales, por lo que la solución encontrada por LINGO, el cual utiliza un método basado en el gradiente, es global. Para una introducción a la programación no lineal puede consultarse Bazaraa, 1993.

3.3 PROGRAMACION EN LINGO

En este caso, y a modo de ejemplo de la programación en LINGO, se utilizan los siguientes conjuntos y funciones.

En la sección SETS se definen las estructuras de datos. El tipo ORIGEN es un vector de dos elementos y hace referencia a las plantas. El tipo DESTINO es un vector de tres elementos y hace alusión a los almacenes. Además, la variable OFERTA es de tipo ORIGEN y la variable DEMANDA es de tipo DESTINO. De esta forma, OFERTA(I) hace referencia al i-ésimo elemento del vector OFERTA, mientras que DEMANDA(J) hace alusión a la j-ésima componente del vector DEMANDA. Este tipo de definiciones permite aumentar de forma sencilla las dimensiones del problema, dadas por el número de plantas y almacenes. Finalmente, la estructura PAR es una matriz donde la primera componente hace referencia al ORIGEN y la segunda al DESTINO. Las variables R,

CAPACIDAD y FLUJO se definen como matrices de este tipo. El elemento PAR(I,J) hace referencia a la arista con ORIGEN(I) y DESTINO(J).

En la sección DATA se introducen los inputs del problema, en este caso los datos del problema en relación a las ofertas de las plantas, las demandas de los almacenes, los valores de r y la capacidad de cada arista. Los datos del problema pueden ser leídos de archivos externos e incluso ser solicitados por LINGO. La variable FLUJO(I,J) indica la cantidad transportada a lo largo de el PAR(I,J) y es la incógnita del problema.

El objetivo es minimizar la función COSTETOTAL, dado por la suma de los costes asociados a cada arista. Existen tres grupos de restricciones en el modelo. En el primer grupo existe una restricción asociada a cada planta que impone que el flujo a lo largo de todas las aristas con origen en I no supere su oferta. En el segundo grupo, existe una restricción asociada a cada almacén que impone que el flujo a lo largo de todas las aristas con destino en J cubra la demanda. Finalmente, la cantidad transportada a lo largo de cada arista debe estar comprendida entre cero y la capacidad. La función @BND hace que LINGO utilice estos límites como simples cotas en la variable, no almacenándose como restricciones del problema.

```

MODEL:
    ! Problema de transporte con restricciones de capacidad;

    SETS:
        ORIGEN / A B / : OFERTA;
        DESTINO / C D E / : DEMANDA;
        PAR(ORIGEN,DESTINO): R, CAPACIDAD, FLUJO;
    ENDSETS

    DATA:
        OFERTA = 80 90 ;
        DEMANDA = 40 50 80 ;
        R = 17 14 11
            16 15 10 ;
        CAPACIDAD = 50 100 100
                    50 80 80 ;
    ENDDATA

    [COSTETOTAL] MIN =
        @SUM( PAR: R * FLUJO/(1 - FLUJO/ CAPACIDAD));

    @FOR( ORIGEN(I):
        @SUM( PAR(I,J): FLUJO(I,J)) < OFERTA(I)););

    @FOR( DESTINO(J):
        @SUM( PAR(I,J): FLUJO(I,J)) > DEMANDA(J)););

    @FOR( PAR: @BND( 0, FLUJO, CAPACIDAD)););

```

END

Téngase en cuenta que aunque se hayan escrito las restricciones estrictas, LINGO por defecto considera restricciones de $\leq$ o $\geq$. Si el producto es indivisible debe sustituirse la última restricción por

```
@FOR( ARISTA: @BND( 0, FLUJO, CAPACIDAD); @GIN( FLUJO););
```

3.4 RESOLUCION

La ventana de salida que proporciona LINGO es la siguiente:

Objective value:		3679.908
Variable	Value	Reduced Cost
FLUJO(A, C)	17.75924	0.0000000E+00
FLUJO(A, D)	22.75914	0.0000000E+00
FLUJO(A, E)	39.48163	0.0000000E+00
FLUJO(B, C)	22.24076	0.2447718E-05
FLUJO(B, D)	27.24086	0.1923961E-05
FLUJO(B, E)	40.51837	0.0000000E+00
Row	Slack or Surplus	Dual Price
COSTETOTAL	3679.908	1.000000
2	0.0000000E+00	11.02291
3	0.0000000E+00	0.0000000E+00
4	0.0000000E+00	-51.90927
5	0.0000000E+00	-34.48863
6	0.0000000E+00	-41.05726

Como puede observarse, en esta ocasión los flujos entre ciudades (columna “Value”) no son valores enteros. El tiempo de transporte mínimo es 3679.9.

4 CONCLUSIONES

Se ha presentado una práctica de optimización empleando LINGO. La experiencia docente derivada de su utilización ha puesto de manifiesto la idoneidad del empleo de dicha herramienta. En particular, su aplicación en la resolución de problemas relacionados con el campo empresarial ha permitido facilitar su asimilación por el alumnado, alcanzando un mejor nivel de comprensión y un buen grado de satisfacción por su parte.

Las herramientas matemáticas como LINGO permiten que alumnos con unos conocimientos elementales en optimización puedan resolver una amplia gama de problemas. En aquellas titulaciones en las cuales las matemáticas no son el fin en si

mismas y se reducen a una herramienta de trabajo, resulta de mayor interés la formulación de los problemas, la interpretación y el análisis de las soluciones, en detrimento del método empleado en la obtención de dicha solución.

En los problemas estudiados se ha hecho una simplificación importante que debe puntualizarse. En el problema sin restricciones de capacidad se conoce el coste de transporte por unidad entre las plantas y los almacenes. En general, este coste puede venir dado en función de la distancia recorrida a lo largo de cierta red que represente las comunicaciones entre ciudades. En tal caso, habría que resolver en primer lugar el problema de las distancias mínimas en la red de transporte y agregar los costes a lo largo del camino mínimo. En el problema con capacidad, se conoce c y r para cada par origen-destino, aunque en general sobre una red de transporte habría que tener en cuenta estos parámetros a lo largo de todas las aristas que pertenecen al camino mínimo.

5 REFERENCIAS

- Bazaraa, M.S., Sherali, H.D. y Shetty, C.M. (1993): *Nonlinear programming. Theory and algorithms* (2ª edición). Ed. John Wiley.
- Chiang, A.C. (1.987): *Métodos Fundamentales de Economía Matemática* (3ª edición). Ed. McGraw-Hill.
- Haeussler, E.I. y Paul, R.S. (1997): *Matemáticas para la Administración, Economía, Ciencias Sociales y de la Vida* (8ª edición). Ed. Prentice-Hall.
- Manual de usuario (1996). *Solver Suite: LINDO, LINGO and WHAT'S BEST*, Lindo Systems Inc.
- Suárez Vega, R., Dorta González, P., González Martel, C. , Andrada Félix, J. y Hernández Guerra, J. (2001): *Problemas de Algebra Lineal para la Economía y la Empresa. Ejercicios resueltos, cuestiones y tratamiento con DERIVE y LINGO*. Ed. El Libro Técnico.
- Sydsaeter, K. y Hammond, P.J. (1996). *Matemáticas para el Análisis Económico*. Ed. Prentice-Hall.